Abschlussprüfung Sommer 2008

Lösungshinweise

Mathematisch-technischer Softwareentwickler
Mathematisch-technische Softwareentwicklerin
0000

1 Mathematische Modelle und Methoden

Allgemeine Korrekturhinweise

Die Lösungs- und Bewertungshinweise zu den einzelnen Aufgaben sind nicht in jedem Fall Musterlösungen, sondern als Korrekturhilfen zu verstehen. Sie sollen nur den Rahmen der zu erwartenden Prüfungsleistungen abstecken. Der Bewertungsspielraum des Korrektors (z. B. hinsichtlich der Berücksichtigung regionaler, branchen- oder betriebsspezifischer Gegebenheiten) bleibt unberührt.

Zu beachten ist die unterschiedliche Dimension der Aufgabenstellung (nennen – erklären – beschreiben – usw.).

Für die Bewertung gilt folgender Punkte-Noten-Schlüssel:

Note 1	=		100 – 92 Punkte	Note 2	=	unter	92 – 81 Punkte
Note 3	=	unter	81 – 67 Punkte	Note 4	=	unter	67 – 50 Punkte
Note 5	=	unter	50 – 30 Punkte	Note 6	=	unter	30 – 0 Punkte

1. Aufgabe (20 Punkte) [Lineare Algebra]

a) Modellbildung:
b sei der Preis für ein Baguette in €.
m sei der Preis für ein Müslibrötchen in €.
s sei der Preis für ein Schwarzbrot in €.

Die Angaben führen zu folgenden linearen Gleichungen:

$$4\mathrm{b} + 8\mathrm{m} + 2\mathrm{s} = 17$$

$$2\mathrm{b} + 12m + 3\mathrm{s} = 20.5$$

Dies ist ein unterbestimmtes Gleichungssystem.

Außerdem gelten die Nebenbedingungen, dass $b, m, s \geq 0$ sein müssen. (5 P.)

b) Die Auflösung des Gleichungssystems erfolgt mit Hilfe der Matrix-Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 & 17 \\ 2 & 12 & 3 & 20.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftarrow II - I/2} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 & 17 \\ 0 & 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftarrow I - II} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s = beliebig, positiv$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ m \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in R^{+} \right\}$$

(5 P.)

ca) Da keiner dieser drei Preise kleiner als null werden darf, muss gelten:

$$m = \frac{3}{2} - \frac{s}{4} \geq 0 \Leftrightarrow s \leq 6$$

$$s \geq 0$$

Da der Preis eines Schwarzbrotes nicht höher als 6 € ist, sind folgende Preisintervalle möglich:

Ein Baguette:	1,25 Euro
Ein Müslibrötchen:	0 bis 1,5 Euro
Ein Schwarzbrot:	0 bis 6 Euro

(5 P.)

cb) Für den Einkauf von 1 Baguette, 2 Müslibrötchen und 3 Schwarzbroten ergibt sich 1.25 + 2 * (1.5 – s/4) +3 s = 4.25 + 2.5 s wobei 0 ≤ s ≤ 6 ist, also

Mindestpreis: 4,25 Euro (für $s = 0$)

Höchstpreis: 19,25 Euro (für $s = 6$) (5 P.)

2. Aufgabe (20 Punkte) [Diskrete Mathematik/Kombinatorik]

a) Modellentwicklung

Das Urnenmodell, welches der Aufgabe zugrunde liegt, ist folgendes:

Ziehen von zwei Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen, ohne Betrachtung der Reihenfolge. Dies nennt man auch die 2er Kombination von {1,...,n} ohne Wiederholung.

Die Formel zur Berechnung der Kombinationsmöglichkeiten ist :

$$C(n,2) = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Alternative Überlegung:

Die Verbindung von Knoten i zu Knoten j, wenn $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ und $i<j$ ist, kann durch das Tupel (i, j) dargestellt werden. Insgesamt gibt es n^2 Tupel, davon $n^2 - n$ mit $i \neq j$ und mit $i < j$. (10 P.)

ba) Es gilt für $n = 10$:

$$C(10,2) = \binom{10}{2} = 45.$$

Es gibt also 45 verschiedene Verbindungen zwischen den zehn Knoten. (4 P.)

bba) Wenn die Zeit für den Test einer Verbindung 10ms dauert und zwischen jeweils zwei Tests eine Pause von 2 µs liegt, so berechnet sich die Gesamtzeit folgendermaßen:

$$T = 45 \cdot 10ms + 44 \cdot 2\mu s \quad = 450.088ms$$

Die gesamte Testzeit beträgt also etwas weniger als eine halbe Sekunde. (3 P.)

bbb) Es können jeweils fünf Tests bei zehn Knoten gleichzeitig laufen. (Es können z. B. auch zehn Tennisspieler gleichzeitig auf fünf Plätzen spielen.)

Die Anzahl der Testzeiten und Pausen und damit die Gesamtzeit sind nun entsprechend verkleinert:

$$\mathrm{T} = 9 \cdot 10ms + 8 \cdot 2\mu s = 90.016ms$$

Es dauert etwa 90 ms. (3 P.)

3. Aufgabe (20 Punkte) [Lineare Algebra/Analytische Geometrie]

Zu den beiden Punkten P,Q gehören folgende Ortsvektoren: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

aa) Werden zwei Punkte direkt verbunden, so ist die Länge der Verbindung gleich groß wie die Länge des Vektors zwischen den Punkten. Der Vektor zwischen den beiden Punkten ist:

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3-9 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Länge des Vektors ist: $\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2} = 9$

Also liegen die beiden Punkte neun Längeneinheiten auseinander. (6 P.)

ab) Den Vektor von P nach Q kann man aus drei Vektoren zusammensetzen:

dem Vektor in x-Richtung: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Länge 6,

dem Vektor in y-Richtung: $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Länge $|-6| = 6$,

und dem Vektor in z-Richtung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der Länge 3.

Die Gesamtverbindung hat also die Länge 15. (6 P.)

b) mögliche Wege für ab):

i) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

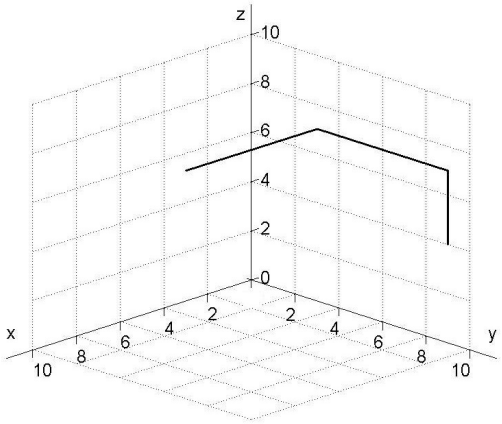
iii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ (6 P.)

c) zeichnen von ab) Pfad i):



(2 P.)

4. Aufgabe (20 Punkte) [Analysis]

a) Es gilt für π z.B.:

$$\pi = 4 \cdot \arctan(1)$$

(2 P.)

b) Die Potenzreihe sieht wie folgt aus:

Es ist bekannt, dass: $e^y = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{y^\upsilon}{\upsilon!}$

Daraus folgt:

$$e^{x-3} = \sum_{\upsilon=0}^{9} \frac{(x-3)^\upsilon}{\upsilon!} + Fehler \approx 1 + (x-3) + \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(x-3)^3}{6} + \frac{(x-3)^4}{24} + \frac{(x-3)^5}{120}$$

$$+ \frac{(x-3)^6}{720} + \frac{(x-3)^7}{5040} + \frac{(x-3)^8}{40320} + \frac{(x-3)^9}{362880}$$

(6 P.)

c) Einsetzen ergibt eine Näherungslösung:

$x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{9} \frac{(-2)^k}{k!} = 1 - 2 + \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + \frac{16}{24} - \frac{32}{120} + \frac{64}{720} - \frac{128}{5040} + \frac{256}{40320} - \frac{512}{362880}$$

$$= 0{,}1350970018$$

$x = 5$:

$$\sum_{k=0}^{9} \frac{2^k}{k!} = 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} + \frac{128}{5040} + \frac{256}{40320} + \frac{512}{362880}$$

$$= 7{,}388712522$$

(5 P.)

d) Die Exponentialfunktion ist streng monoton und deshalb braucht man nur die Randpunkte zu untersuchen. (2 P.)

e) Unter Benutzung des Hinweises $2{,}71 < e$ ergibt sich der Wert:

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2} - \sum_{k=0}^{9} \frac{(-2)^k}{k!} = \frac{1}{e^2} - \frac{383}{2835} < \frac{1}{2{,}71^2} - \frac{383}{2835} \approx 0{,}0010667$$

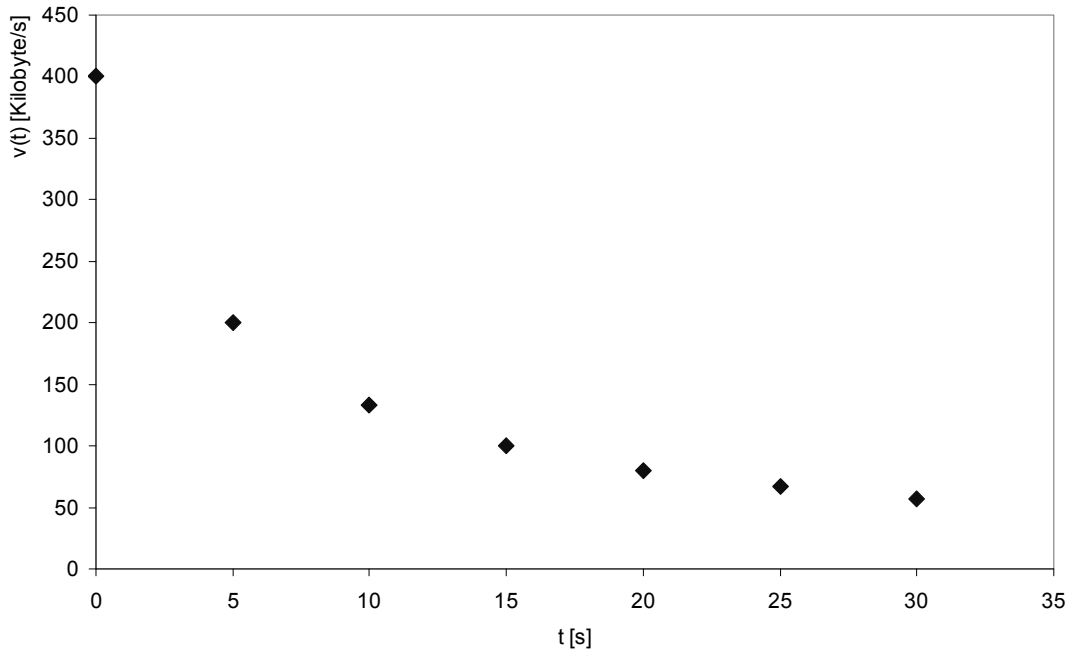
An der Stelle x=5 ist der Fehler wegen $e < 2{,}72$ folgendermaßen abzuschätzen:

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2 - \sum_{k=0}^{9} \frac{2^k}{k!} = e^2 - \frac{20947}{2835} < 2{,}72^2 - \frac{20947}{2835} \approx 0{,}0096875$$

(5 P.)

5. Aufgabe (20 Punkte) [Integralrechnung]

a) Zeichnen der Messwerte in ein Koordinatensystem:



(2 P.)

b) Die gesamte übertragene Datenmenge errechnet sich folgendermaßen:

ba) $5\text{s} \cdot (400 + 200 + 133.3 + 100 + 80 + 66.7 + 57.1) Kilobyte / s = 5185.5 Kilobyte$ (4 P.)

bb)
$$5s \cdot \left(\frac{400+200}{2} + \frac{200+133.3}{2} + \frac{133.3+100}{2} + \frac{100+80}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{80+66.7}{2} + \frac{66.7+57.1}{2} + \frac{57.1+50}{2} \right) Kilobyte / s$$

$$= 5s \cdot \left(\frac{400}{2} + 200 + 133.3 + 100 + 80 + 66.7 + 57.1 + \frac{50}{2} \right) Kilobyte / s = 4310.5 Kilobyte$$

Es werden etwa 4.310 Kilobyte übertragen. (4 P.)

c) k ist die Abkürzung für die Konstante in: $v(t) = \frac{k}{5+t}$

Der Punkt t = 15 wird eingesetzt: v(15)=*k*/20 = 100, also *k*=2000

(2 P.)

da) Gesucht ist das Integral der obigen Funktion im Intervall [0,35]:

$$\int_0^{35} \frac{2000}{5+t} dt = \left[2000 \cdot \ln(5+t) \right]_0^{35} \approx 4158.883084$$

Es werden also ca. 4.159 Kilobyte transferiert. (4 P.)

db) t sei die gesuchte Zeit. Es gilt für t:

$$1024 = \left[2000 \cdot \ln(5+x) \right]_0^t \Leftrightarrow 1024 = (2000 \cdot \ln(5+t)) - (2000 \cdot \ln(5))$$

$$\Leftrightarrow \ln(5+t) = 1024 / 2000 + \ln(5) \Leftrightarrow t = e^{1024/2000 + \ln(5)} - 5$$

$$\Leftrightarrow t \approx 3.3431 [s]$$

Nach etwa 3,34 Sekunden ist ein Megabyte geladen worden. (4 P.)

6. Aufgabe (20 Punkte) [Stochastik]

p_1 sei die Wahrscheinlichkeit, dass die eine Komponente ausfällt, p_2 die Wahrscheinlichkeit, dass die andere ausfällt.

$$p1 = P(\text{"}Komponente\,1\ \ fällt\ \ aus\text{"}),$$
$$p2 = P(\text{"}Komponente\,2\ fällt\ \ aus\text{"})$$

aa) Fällt in einer Parallelschaltung eine von zwei Komponenten aus, so kann die andere weiterarbeiten.

Damit die Maschine ganz ausfällt, müssen beide Komponenten ausfallen.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass beide Komponenten ausfallen, gilt:

$$P(A_{Parallel}) = p_1 \cdot p_2$$ (4 P.)

ab) Fällt in einer Serienschaltung eine Komponente aus, so ist es für die Funktionalität der Maschine unerheblich, ob die andere auch ausgefallen ist. Damit die Maschine ausfällt, genügt es, wenn mindestens eine der beiden Komponenten ausfällt. Damit die Maschine funktioniert, müssen beide Komponenten intakt sein. Demnach gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit, dass sie sich als Komplement zur Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren berechnet, nämlich:

$$P(A_{Serie}) = 1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)$$ (4 P.)

ba) pg sei die Wahrscheinlichkeit, dass alle Komponenten G gleichzeitig ausfallen, d. h. gesucht ist

$$P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = P(G_1)P(G_2)P(G_3)\,.$$

p_f sei die Wahrscheinlichkeit, dass Komponente F ausfällt.

p_h sei die Wahrscheinlichkeit, dass alle Komponenten H gleichzeitig ausfallen.

$$p_g = 0.1^3 = 10^{-3} = 0.001$$
$$p_f = 0.01$$
$$p_h = 0.05^2 = 2.5\cdot 10^{-3} = 0.0025$$

Begründung siehe Teil aa). Es handelt sich jeweils um eine Parallelschaltung und daher müssen alle Komponenten gleichzeitig ausfallen.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls des Gesamtsystems berechnet sich nach ab) folgendermaßen:

$$p = 1-(1-p_g)(1-p_f)(1-p_h) = 1-(1-0.001)(1-0.01)(1-0.0025) = 0.01346$$

Die Maschine fällt also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1.35 % aus.

(Eine alternative Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls wäre

$$p = p_g + (1-p_g)\cdot p_f + (1-p_g)\cdot(1-p_f)\cdot p_h \approx 0.01346\,)$$

(6 P.)

bb) Es gibt drei Möglichkeiten:

1.) Es wird eine weitere Komponente G eingebaut:

$$p_g = 0.1^4$$

$$p = p_g + (1 - p_g) \cdot p_f + (1 - p_g) \cdot (1 - p_f) \cdot p_h \approx 0.01257$$

<u>oder:</u>

$$p = 1 - (1 - p_g)(1 - p_f)(1 - p_h) = 1 - (1 - 0.0001)(1 - 0.01)(1 - 0.0025) = 0.01257$$

2.) Es wird eine weitere Komponente F eingebaut:

$$p_f = 0.01^2$$

$$p = p_g + (1 - p_g) \cdot p_f + (1 - p_g) \cdot (1 - p_f) \cdot p_h \approx 0.00360$$

<u>oder:</u>

$$p = 1 - (1 - p_g)(1 - p_f)(1 - p_h) = 1 - (1 - 0.001)(1 - 0.0001)(1 - 0.0025) = 0.00360$$

3.) Es wird eine weitere Komponente H eingebaut:

$$p_h = 0.05^3$$

$$p = p_g + (1 - p_g) \cdot p_f + (1 - p_g) \cdot (1 - p_f) \cdot p_h \approx 0.01111$$

<u>oder:</u>

$$p = 1 - (1 - p_g)(1 - p_f)(1 - p_h) = 1 - (1 - 0.001)(1 - 0.01)(1 - 0.000125) = 0.01111$$

Wie hier deutlich zu erkennen ist, würde der Einbau einer weiteren Komponente F parallel zu der anderen die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine nicht ausfällt, am meisten erhöhen. Deshalb ist der Einbau einer Komponente F zu empfehlen. (6 P.)